Niveau(x) d'enseignement : 4 Numéro EDUQ : 9170642
Centre d'intérêt : 841

Janvier, Claude

Contextualisation et représentation en mathématiques / par Claude Janvier
-- Montréal : Université du Québec à Montréal, Centre interdisciplinaire de recherches sur l'apprentissage et le développement en éducation, 1989
21 f. ; 22 cm -- (Séminaire sur la représentation ; 50)

"La publication de ce séminaire est rendue possible grâce à une subvention du fonds FCAR". Bibliogr. : f. 21.

Vedette(s)-secondaire(s) : Université du Québec à Montréal. Centre interdisciplinaire de recherches sur l'apprentissage et le développement en éducation

Descripteur(s) : Mathématiques • Intégration • Secondaire (Ordre d'enseignement)

L'auteur s'intéresse au problème de l'enseignement et des sciences au niveau du premier cycle du secondaire. Des études effectuées par des chercheurs qui ont étudié sur le terrain comment procèdent divers "utilisateurs" de l'arithmétique (magasiniers d'entrepôts, vendeurs, consommateurs, etc.) ont fait ressortir que la contextualisation des calculs détermine souvent les algorithmes utilisés. Ainsi, le contexte qui encadre le calcul fournit un support au raisonnement en ce sens qu'il détermine le problème à résoudre, qu'il le fait évoluer et qu'il donne un sens aux entités arithmétiques considérées et aux opérations à effectuer. Mais les conclusions issues de ces études semblent indiquer que le fonctionnement de ce raisonnement contextualisé s'oppose aux méthodes de pensée abstraite ou générale que l'Ecole vise à développer chez les étudiants.

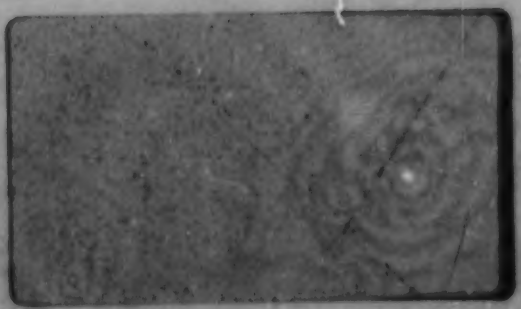
Type de document :

2.50

9,7064

clrade

CENTRE INTERDISCIPLINAIRE DE RECHERCHE SUR L'APPRENTISSAGE ET LE DÉVELOPPEMENT EN ÉDUCATION



Université du Québec à Montréal

Contextualisation et représentation en mathématiques

par Claude Janvier
CIRADE et Département de mathématiques et d'informatique
Université du Québec à Montréal

Séminaire sur la Représentation
6 octobre 1989 - n° 50

CIRADE, UQAM, août 1990

Note: La publication de ce séminaire est rendue possible grâce à une subvention du fonds FCAR.

Remarques préliminaires

Je m'intéresse depuis plus de quinze ans au problème de l'intégration de l'enseignement des mathématiques et des sciences au niveau du premier cycle du secondaire. L'exposé d'aujourd'hui se présente comme une manière de répondre aux questions que j'accumule sur ce thème depuis autant d'années. Je n'entends pas par enseignement intégré un enseignement mieux articulé, mieux coordonné grâce à des programmes mieux structurés ou encore grâce à une meilleure concertation entre les enseignants de mathématiques et de sciences. Par intégré, je réfère à un enseignement fondé sur des situations où la mathématique se présente comme le langage de modélisation des sciences qu'il devient alors souvent difficile de distinguer la démarche scientifique proprement dite.

Mes axes de recherche sur le rôle des représentations graphiques dans le raisonnement mathématique et scientifique remonte à ma thèse de doctorat. Vous constaterez l'influence constante de cette préoccupation dans l'analyse présentée dans ce texte.

Je me permets de reporter à plus tard la présentation du plan de la conférence. Il faut d'abord que je décrive les éléments de la problématique.

A) Le raisonnement arithmétique contextualisé

L'élément cristallisateur du cadre théorique que je vous expose aujourd'hui est la découverte d'une orientation de recherche ayant mené à des résultats intéressants sur l'utilisation de l'arithmétique. À la source de ma présentation se trouvent les travaux de Lave, Carraher, Schliemann et bien d'autres tous réalisés après 1980 (voir la bibliographie). Ces chercheurs ont étudié sur le terrain comment procèdent divers «utilisateurs» de l'arithmétique: tels magasiniers d'entrepôts, vendeurs de billets de loto, consommateurs au supermarché, jeunes vendeurs au marché, etc. Ils ont cherché à découvrir jusqu'à quel point l'arithmétique est effectivement utilisée, comment elle l'est et avec quel taux de réussite.

Avant de présenter les résultats, un commentaire méthodologique s'impose. Comme le mentionne le «Cockcroft Report» (1982) commentant des études semblables réalisées en Angleterre:

> Many jobs require the employee to make explicit use of mathematics – for instance, to measure, to calculate dimensions from a drawing, to work out costs and discounts. However, even when mathematics is being used, frequent repetition and increasing familiarity with a task may mean that it may cease to be thought of as mathematics and become an almost automatic part of the job. A remark which was overheard (in surveys) – «that's not mathematics, it's common sense» is an illustration of this. (page 18)

C'est ainsi que les travaux dont nous allons maintenant présenter les résultats, les chercheurs ont dû prendre en compte les difficultés inhérentes à ce genre d'études et ont eu recours à une combinaison d'entrevues et d'observations participatives.

Les résultats de ces recherches convergent. Premièrement, les sujets observés doivent effectuer de nombreux calculs arithmétiques. Et de plus, ces calculs sont effectués en pratique sans erreur. Dans le cas des consommateurs au supermarché, des erreurs ne sont présentées dans 2% seulement des calculs effectués en vue d'acheter un article alors qu'un test arithmétique portant sur les quatre opérations a donné un résultat moyen de 59%. On peut à juste titre arguer que les problèmes ne sont pas les mêmes. Cependant, on a pu montrer que les mêmes problèmes repris dans un cadre scolaire ne sont pas aussi bien réussis. Par exemple, pour les jeunes vendeurs itinérants de Recife (Carraher, T. N. et al. (1985)), un test passé à l'école dans la quinzaine qui a suivi l'observation et reprenant les calculs qu'ils avaient réussis pratiquement à 100% a été raté de manière statistiquement significative.

Cette anomalie s'explique en partie par le fait que les stratégies de résolution de

problèmes utilisées diffèrent de celles introduites en classe. Les méthodes de calcul sont primitives, mais efficaces. Ainsi, la multiplication deviendra en général une addition répétée. Même si à l'école on leur a répété que pour faire 10 fois 35 on ajoute un «0», les utilisateurs se méfient des trucs scolaires. Les «contraintes» sociales commandent de ne pas se tromper. On a ainsi observé un jeune vendeur faire plutôt 105 + 105 + 105 + 35. Il est facile de s'imaginer qu'il contrôle bien 3 fois 35 ayant vendu plusieurs fois 3 noix de coco à 35 l'unité ou encore qu'il calcule avec aisance 3 fois 35 (105). On s'explique alors facilement que le «10» de 10 fois 35 est décomposé en (3 + 3 + 3) + 1. C'est ainsi que sont évaluées toutes les fautes en arithmétiques qui relève d'applications fantaisistes et erratiques des algorithmes appris en classe et qui sont bien répertoriés.

Donnons un autre exemple. Dans les problèmes de règle de trois, les sujets de ces études recourent rarement au principe qui les ramène à la valeur pour l'unité. Pour le problème simple suivant: «Si *3 pommes* valent *6 francs*, combien valent *9 pommes*?» les enfants ne calculent pas la valeur d'une pomme mais reconnaîtront qu'il a trois fois plus de pommes donc que l'on payera trois fois plus cher. C'est ainsi qu'ils évitent de combiner les unités de grandeur (ici, franc et pomme). Ce sont des procédures déjà bien décrites par Vergnaud (1983), Freudenthal (1983) et bien d'autres. Évidemment, il existe des combinaisons de nombres qui rendent cette démarche plus difficile, mais de toute façon, pour des opérations équivalentes, il a été démontré que les élèves retournent moins fréquemment à la valeur de l'unité.

Il ressort principalement de ces travaux de recherche que la **contextualisation des calculs** détermine souvent les algorithmes utilisés. En d'autres mots, leurs résultats suggèrent l'existence d'une arithmétique contextuelle dont les objets sont des quantités ou des grandeurs issues du contexte plutôt que des nombres abstraits. Dans l'exemple fourni ci-haut, plusieurs indices laissent croire que les pièces de monnaie (selon leur dénomination) déterminent les modalités de calcul tout comme la disposition des objets dans les cases. Ainsi, le contexte qui «encadre» le calcul fournit un support au raisonnement en ce sens qu'il **détermine** le problème à résoudre, qu'il **le fait évoluer** et qu'il **donne un sens aux entités arithmétiques** considérées et aux **opérations** à effectuer.

Le raisonnement contextualisé s'oppose dans son fonctionnement aux méthodes de pensée abstraite ou *générale* que l'École vise à développer chez les étudiants. Alors que le système éducatif entend leur fournir des connaissances généralisables qu'ils peuvent appliquer dans le futur dans des domaines larges et variés, les recherches mentionnées ci-haut semblent indiquer que cet objectif de transmission de savoirs généraux est souvent contredit dans les faits. Nous reviendrons sur les conséquences de cette troublante affirmation en conclusion.

B) Le raisonnement mathématique contextualisé

Si le commun des mortels utilise à sa manière ou encore mieux d'une manière contextualisée l'arithmétique, en est-il de même du scientifique qui utilise efficacement les mathématiques (par exemple, dans le cas de la solution d'équations ou lorsqu'il recourt aux notions de fonction, de dérivée, d'intégrale ...)

Quand je me suis posé cette question pour la première fois, il m'est revenu à l'esprit les processus de trigonométrie et de nombres complexes que réalisait mon professeur d'électronique de l'époque. J'avais la conviction qu'il appliquait bel et bien certaines mathématiques dans ces études de circuits. Mais, ou bien ce n'était pas les mêmes ou bien il ne les appliquait pas comme je savais le faire. Dans le même cours, nous devions monter en équipe un récepteur en modulation de fréquence qui puisse syntoniser une fréquence précise. Mon co-équipier nommé Garry fit le plus gros du travail car il manipulait avec aisance une espèce d'arithmétique électronique qui lui permit de réaliser rapidement le montage. Cependant, il échoua son examen de fin d'année! Quant à moi, je sus tout juste mémoriser les bonnes formules pour le réussir sans grand brio.

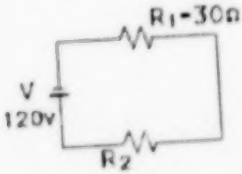
Ce sont en partie ces aventures qui furent à la source du projet de recherche que je m'apprête à démarrer tout prochainement. Soulignons qu'il portera précisément sur le raisonnement mathématique des ingénieurs et techniciens lorsqu'ils se trouvent en situation de résolution de problème face à un circuit électrique.

Un premier exemple me permettra d'illustrer mieux ce que j'entends par un raisonnement mathématique contextualisé et par conséquent de préciser les objectifs de la recherche qui démarre.

L'exemple du circuit électrique simple

Considérons le problème suivant:

On sait qu'un courant de 3 ampères parcourt le circuit illustré dans le schéma ci dessous. Trouver la valeur de la résistance R_2 si la résistance interne de la batterie est négligeable.



D'abord, selon la pratique habituelle des cours de physique, l'étudiant cherchera à bien poser ses équations. Il faut être très peu inspiré pour écrire dans un premier temps $V = V_1 + V_2$ pour ensuite poser $V = R_1 \cdot I$ et $V = R_2 \cdot I$. Pour obtenir la dernière équation, les raisonnements sont nombreux. L'essentiel est d'arriver finalement à substituer les valeurs dans l'équation pour obtenir

$$120 = 3 \cdot 10 + 3R_2$$

Et en résolvant

$$120 - 30 = 3R_2$$
$$90/3 = R_2 = 30$$

Ce qu'il faut remarquer c'est surtout le fait que l'on a manipulé des équations en recourant relativement peu à l'organisation «schématique» du circuit.

Par contre, la majorité des professeurs de physique ou d'électricité sont loin de faire appel aux équations pour «résoudre» un tel circuit simple. Un semblant de mise en équation se fait **«sur le diagramme»** qui leur suffit pour établir une articulation entre les concepts impliqués: potentiel, courant et résistance (au moins). Aux équations est substituée une combinaison d'éléments graphiques fournissant une description équivalente du phénomène à résoudre. Par exemple, le technicien de notre laboratoire a eu recours à l'idée d'une **résistance totale de 40 ohms** («apparente» sur le diagramme) car 3 ampères et une différence de potentiel de 120 volts donne 40 ohms. Finalement, il

manquer 10 à 30 pour obtenir 40. Il ressort donc qu'un problème n'est pas toujours résolu entièrement au niveau des équations et que les entités considérées comportent dans leur traitement des connotations contextuelles.

On remarque par ailleurs que l'on accorde toujours dans la pratique scolaire une **priorité** à la description équationnelle des relations entre les variables du circuit. Le projet de recherche que nous démarrons part du fait que le praticien ne semble pas accorder dans son raisonnement la *même* prééance à la représentation équationnelle du circuit et qu'il sait malgré tout manipuler les relations que ces équations «supportent».

On constate dans le cas précédent qu'un objectif de résolution de problème est à la source même du raisonnement contextualisé que ce soit en arithmétique ou en mathématique. Par contre, il semble souvent y avoir une différence fondamentale. On ne retrouve pas chez l'ingénieur ou le technicien le même souci pour la réponse précise le recours à l'approximation est non seulement toléré mais elle est pratique courante. Constitue-t-elle par contre une des caractéristiques du raisonnement contextualisé en mathématique?

Nous sommes maintenant à même de préciser le plan pour le reste de la présentation. Nous venons tout juste de préciser l'expression raisonnement contextualisé. Nous allons maintenant, à l'aide de quelques exemples

- examiner comment s'articule la solution avec le contexte
- analyser le rôle des représentations tant internes qu'externes dans cette articulation.

Nous pourrons ensuite

- montrer la nécessité de remettre en question la notion d'application,
- expliciter les conséquences pour l'enseignement,
- exposer d'autres approches théoriques à la question,
- et conclure.

Avant de passer aux exemples, examinons les similarités entre les méthodes des professeurs de physique et celles des jeunes marchands.

1. **Les deux recourent au calcul mental.**
2. **On remarque dans les deux cas un support concret au raisonnement (le diagramme du circuit).**

3. Les deux groupes sont ramenés aux relations fondamentales liées entre coefficient, résistance, différence de potentiel.
4. Dans chaque cas, on tente de réduire la complexité de la représentation symbolique dans une formulation du problème et dans la méthode de résolution.

Doit-on voir là certaines caractéristiques générales du raisonnement mathématique contextualisé? D'autres exemples nous permettront de répondre à cette question, de préciser le cas échéant ces caractéristiques et peut-être d'en formuler de nouvelles.

L'exemple des nénuphars

Le problème suivant est une énigme qui a l'art d'en surprendre plusieurs par sa simplicité :

Un étang de nénuphars couvre une aire de 256 m². Les nénuphars qui le couvrent doublent leur superficie à chaque jour. Si l'étang est couvert au 14ème jour, quand était-il à demi couvert?

S'il est posé pendant les leçons de mathématiques consacrées à la fonction exponentielle, il donnera lieu chez les étudiants à une mise en équation menant à une fonction du type $p(x) = k2^x$. Les étudiants aboutiront à une équation exponentielle du type $2^x = 64$ que certains résoudront selon les règles de l'art, à savoir en utilisant les logarithmes[11].

Encore ici, on observe dans la solution auquelle recourent les étudiants une forme de braquage sur l'équation évacuant le contexte qui, absent, ne peut supporter le raisonnement. Par contre, lorsqu'on se libère des méthodes suggérées par une approche «mathématique scolaire» et que l'on se représente à l'esprit une série de taches qui couvre à chaque coup deux fois plus d'aire d'un étang imaginaire, la solution peut venir plus aisément. L'image mentale dynamique ainsi évoquée peut nous aider à associer **doubler** et **être à moitié couvert**, comme étant deux opérations ou actions inverses dans le temps.

Dans le cas du problème des nénuphars, on constate que la solution rapide et sans équation du problème a été effectuée en remontant à la relation qui **définit fondamentalement** comment sont reliées les variables de la situation envisagée : **doubler de jour en jour** (de lendemain en lendemain) et **se découvrir de moitié** (être couvert de moitié) **de veille en veille**.

Il agit ici d'un raisonnement contextualisé ! On constate que la solution peut ne pas dépendre d'une équation. Le support concret dans ce cas-ci se présente comme une image mentale, une sorte d'évocation abstraite d'un étang qui permet de remonter à la relation fondamentale. Elle ne s'appuie pas sur l'équation et repose simplement sur la réalisation possible d'un calcul mental simple. Il appert donc que l'on retrouve les quatre caractéristiques d'un raisonnement contextualisé seul que le concret de la situation évoquée revêt un caractère moins matériel.

L'exemple suivant nous permettra un pas en avant dans l'analyse. Il ne faut pas croire en effet que le contexte détermine la mathématisation d'une manière unique ou en d'autres mots que les éléments du contexte ne conduisent qu'à un seul raisonnement efficace.

Le taux avant ou après

Voici un petit problème qui pose beaucoup d'ennui à mes étudiants.

Si un magasin accorde un rabais de 15%, est-il plus avantageux de faire percevoir la taxe de 10% avant ou après le rabais ?

Les étudiants procèdent naturellement à une solution algébrique car le prix considéré est quelconque.

On peut exprimer ce verbe et on distingue les deux cas.

1) **taxe d'abord, rabais ensuite**

prix avec taxe = a + 0.10a

On constate ici que le contexte joue en fonction à passer une commande.

prix taxe moins le rabais = (a + 0.10a) - 0.15 (a + 0.10a)

Ici le rabais arrive à passer une différence!

= a + 0.10a - 0.15 a - 0.015a

= 1.10a - 0.165a = 0.935a

2) **Rabais d'abord et taxe ensuite**

prix avec rabais = x - 0.15x

(le rabais est associé à une différence)

prix avec rabais plus taxe = (x - 0.15x) + 0.10(x - 0.15x)

(dû par le consom. la taxe s'ajoute au prix...)

= x - 0.15x + 0.10x - 0.015x

= 0.935x

On conclut donc s'il ne s'est pas glissé d'erreur que l'on peut procéder indifféremment. Il n'en coûtera pas plus cher d'un manière que de l'autre. Cependant, malgré ces calculs algébriques plusieurs restent peu convaincus et se donnent des exemples numériques!!!

Mais une autre manière de procéder nous conduit plus directement à la solution. Malgré tous les mêlais de la calculette sur les capacités de calcul des jeunes, j'ai constaté que certains jeunes vendeurs évaluaient le «prix après taxe» en n'effectuant qu'une seule opération plutôt qu'en utilisant la touche %. Ceci est possible car ajouter 15% correspond à prendre 115% du montant ou équivaut à multiplier par 1.15. Donner un rabais de 20% est équivalent à demander 80% du montant ou à multiplier par 0.80. Cette interprétation du calcul permet d'aborder différemment la question posée.

On peut en effet écrire

1) prix avec taxe = 1.10x

prix taxé avec le rabais = 0.80 ☒ 1.10 x

2) prix avec rabais = 0.80x

prix avec rabais plus taxe = 1.10 ☒ 0.80x

On constate dans ce cas qu'une interprétation différente du rabais et de la taxe nous a permis de **rester collés près du contexte** en ce sens qu'il n'y a pas eu de **réponse intermédiaire** nous situant essentiellement du côté du calcul qui, dans ce cas sera mental (caractéristique 1) est de beaucoup simplifié. Chacun des deux calculs étant consignable dans un symbole dont le sens reste près du contexte ou, en d'autres mots, **interprétable directement par les actions dans le contexte**, la conviction qui s'ensuit n'est donc que plus grande. Le support concret (caractéristique 2) ou raisonnement est une forme de réduit ou transformation qui renvoie directement à des images mentales ou à des évocations d'actions que permet ici la mise en relation directe de deux résultats. Cependant, la conclusion qui consiste à poser l'égalité de ces deux résultats découle de la

comparaison de leur écriture symbolique (0,85 × 1,10 ou 1,10 × 0,85) par le biais de l'axiome de la commutativité reconnue comme valide par l'expérience sur les opérations numériques. C'est à ce niveau qu'interviennent croyons-nous les relations fondamentales (caractéristique 3). Quant à la réduction de la complexité de la représentation symbolique dans la formulation de la question (caractéristique 4) elle est ici évidente.

Par contre, la question posée ou celle qu'on se pose détermine le bien fondé de l'utilisation d'un raisonnement plutôt que d'un autre. Ainsi, si l'on m'avait demandé ce qui est plus avantageux pour le marchand ou pour le percepteur des taxes, il aurait fallu recourir à un autre type de **rattachement du calcul au contexte donné**. En fait, le calcul des élèves aurait conduit à la réponse. Il apparaît donc que la nature de la question que l'on se pose à l'intérieur d'un contexte est également déterminante pour orienter le raisonnement mis en branle. Ceci suppose donc une souplesse dans le choix des méthodes chez «l'utilisateur averti». Ces considérations nous amènent à aborder l'exemple suivant qui est beaucoup plus un cas général.

Les mathématiques contextuelles de la croissance

La croissance peut être considérée comme une succession d'ajouts et ainsi s'imaginer comme une somme. La croissance se conceptualise donc dans un premier temps comme un **phénomène additif** car une croissance comporte un état initial (ϕ i) auquel s'ajoute un accroissement (a) pour donner un état final (ϕ f). On a donc la relation additive $\phi f = \phi i + a$. Par exemple, si $\phi = 52$ et $a = 8$, alors $52 + 8 = 60$ (ϕ f).
La notion d'addition domine l'esprit de celui qui s'attaque à un problème où la croissance semble être présente. Par contre, il est possible de donner une **interprétation multiplicative** à la croissance. Il suffit alors de procéder en «pourcentage» par une mise en évidence (au sens algébrique) de l'état initial dans la relation. Dans l'exemple, on obtient

$$60 = 52 + 8 = 52 (1 + 8/52) = 52 (1 + 0,1538) = 52 \times 1,1538$$

On peut donc interpréter une croissance comme une transformation multiplicative qui affecte l'état initial. Plus précisément, on a

$$\phi f = \phi i (1 + \theta/\phi i)$$

et ce facteur $1 + \theta/\phi i$ est exactement le facteur multiplicatif qui décrit la croissance entre deux instants.

Je considère que cette interprétation multiplicative de la croissance appartient en propre à plusieurs raisonnements contextualisés en sciences. On peut prendre le cas de l'intérêt composé pour lequel les manuels scolaires suggèrent le recours à une formule, alors que la composition de cet opérateur multiplicatif grâce à la calculatrice de poche permet de résoudre la majorité des problèmes. En effet, l'utilisation de la fonction constante sur une calculatrice simple permet en effet de composer ces opérateurs multiplicatifs. Ainsi, une augmentation de 10% par année peut simplement se calculer en posant 1.10 et en pressant la touche « suivi d'autant de touche « que l'on considère d'années. En d'autres mots, on a :

10% d'augmentation après 1 an	correspond à	presser «, 1.10
10% d'augmentation après 2 ans	correspond à	presser «, 1.10, «
10% d'augmentation après 3 ans	correspond à	presser «, 1.10, «, «
10% d'augmentation après 4 ans	correspond à	presser «, 1.10, «, «, «

On définit donc ainsi une suite géométrique $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots, ar^n$. Dans ce cas, «a» est l'état initial et «r» le facteur multiplicatif défini plus haut.

L'interprétation additive met l'accent sur le processus mais l'interprétation multiplicative focalise l'attention sur le résultat qu'il caractérise par un symbole unique. En d'autres mots, le facteur multiplicatif introduit définit une transformation qui nous amène de l'état initial a_i à l'état final. L'interprétation multiplicative de la croissance nous conduit rapidement à la fonction exponentielle qui n'est alors que la composition de la croissance multiplicative. Elle joue donc un rôle central dans le raisonnement scientifique.

Il apparaît important de faire remarquer ici que les éléments du monde extérieur qui sont retenus le sont grâce au mode de calcul retenu ou utilisé. Il a donc été possible de maintenir le sens de l'opération près du contexte étape après étape non pas en recourant au calcul mental (comme nous l'avions quelquefois remarqué jusqu'ici mais grâce à un **moyen de calcul** (la calculatrice) qui permet de garder le calcul rapproché des éléments du contexte. Il semble donc que le calcul accompagnant le raisonnement contextualisé doit s'effectuer facilement de manière à ne pas détourner l'esprit du support fourni par les représentations du contexte.

Remise en question de la notion d'application

J'estime que c'est la notion d'**application** qui doit être remise en question pour analyser correctement la notion de contextualisation. D'abord qu'entend-on par application des mathématiques en sciences? **Appliquer** les mathématiques revient à

résoudre des équations après les avoir plus ou moins laborieusement posées. Il est facile de constater qu'il existe une tradition épistémologique que la quasi-totalité des scientifiques entretiennent, tradition qui assigne un rôle aux mathématiques par rapport aux sciences en général. Selon cette manière de voir, les concepts mathématiques sont d'abord appris dans la classe de mathématiques pour être ensuite **appliqués** dans les classes de sciences. En pratique, cette entente tacite entre enseignants de mathématique et de sciences entraîne un déroulement selon un scénario bien rodé: les problèmes donnant lieu à des solutions mathématiques se trouvent à la fin des chapitres et la lecture du problème permet de poser les équations qui restent ensuite à résoudre. Ce qui est important à souligner ici c'est qu'en général le travail de modélisation ou de mathématisation par lequel on associe une équation ou une famille d'équations à un phénomène relève de la présentation du professeur; les étudiants n'y sont jamais partie prenante. Cette analyse du «phénomène à décrire» qui permet d'associer des relations mathématiques à certains éléments situationnels n'est pas reprise par les étudiants. Les paramètres introduits ne renvoient donc pas pour eux aux mesures caractéristiques du phénomène à étudier.

Selon le paradigme dominant c'est donc en résolvant des équations qu'on applique les mathématiques considérées comme un système de relations abstraites, comme une série de méthodes indépendantes du phénomène considéré. Il est à remarquer que cette position ne peut être que relativement contemporaine car on n'a qu'à penser à Laplace, Gauss, Newton et bien d'autres qui combinant pensée mathématique et raisonnement scientifique était aisé à l'abri de la compartimentation que fait surgir la notion d'application.

À l'heure actuelle, le concept mathématique a un statut en soi par rapport à d'autres concepts mathématiques et n'a donc pas de «teneur» contextuel. Après son introduction en classe de mathématique, c'est par l'application, qui viendra après, que l'on espère lui ajouter une certaine «richesse» contextuelle. Mais il arrive trop souvent (si ce n'est pas à tout coup) que la facilité du traitement symbolique interdise de remonter aux relations du phénomène.

C'est essentiellement l'organisation inter-conceptuelle des notions mathématiques qui détermine les concepts mathématiques. Qu'on pense, par exemple, à la notion de variable, qui est devenue une particularisation de la notion de produit cartésien. Les «applicateurs» semblent se condamner à faire usage, pour situer, de ces notions abstraites que le professeur de mathématiques leur lègue. Il arrive cependant par les temps qui courent que ces relations de dépendance s'embrouillent, qu'il en résulte des querelles de factions, le scientifique alléguant que le mathématicien

n'a pas préparé le bon objet. Tous savent très bien qu'il existe pour les étudiants et, dans la plupart des pays et depuis quelques décennies, des fonctions au cours de mathématique et celles du cours de physique. Ceci est aussi vrai tantôt pour les vecteurs, tantôt pour les fonctions logarithmiques.

Les exemples que nous avons abordés jusqu'ici illustrent à quel point certaines mathématiques ne se construisent pas en marge des relations qu'il veulent représenter sans qu'il en coûte quelque chose non seulement par rapport à l'efficacité de la solution, mais aussi par rapport à la possibilité même de résoudre un problème. Certaines mathématiques ne sont jamais tout à fait abstraites chez leur utilisateur.

Comparaison entre application et contextualisation

Dans les exemples traités précédemment, on se trouve très tôt dans le domaine abstrait des mathématiques comme l'illustre la figure 2 a et on peut alors en utilisant ses méthodes aboutir à des conclusions. Ce qu'il faut principalement remarquer c'est que le travail mathématique se fait essentiellement sur les équations, sans retours aux réalités sous-jacentes ayant permis l'établissement des équations. Les exemples présentés jusqu'ici nous ont fait voir que le raisonnement contextualisé se substituant à l'équation vise à rapprocher les opérations effectuées sur celles-ci des caractéristiques du contexte grâce au support défini par le contexte: diagramme, description verbale, image mentale, opérations gestuelles. En d'autres mots, un raisonnement mathématique contextualisé rapproche les deux côtés du diagramme de la figure 2 a pour donner la figure 2 b. Le problème abordé n'est donc plus exclusivement résolu en se situant dans la région de droite, en n'utilisant que les processus mathématiques sans référence au contexte. C'est alors que les équations sont tantôt simplifiées, tantôt réorganisées si elles ne disparaissent pas totalement.

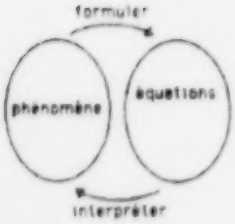


figure 2.a
Dans les applications, travail dans le domaine mathématique

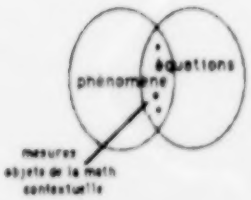


figure 2.b
La contextualisation rapproche les deux côtés du diagramme

Le raisonnement mathématique contextuel «œuvre» précisément dans l'intersection des deux domaines des figures 2.a et 2.b tout en pondérant cette affirmation par le fait que ces diagrammes ont un caractère plutôt illustratif. Ils nous permettent quand même d'apprécier la place particulière qu'occupent les mesures, les nombres contextualisés qui sont les objets de la mathématique contextuelle : à l'intersection de la mathématique et de la réalité dans un processus de résolution de problème.

Représentations et contextualisation

J'ai jusqu'ici insisté sur le fait qu'une certaine utilisation du contexte nous permettait de remonter directement **aux relations fondamentales** tout en simplifiant le recours aux formules algébriques. Nous nous proposons maintenant d'examiner comment s'organise l'articulation des **représentations** dans la structuration ou systématisation à la source du raisonnement contextualisé.

Faisons remarquer d'abord que dans nos exemples, le raisonnement contextualisé s'opère sur **des problèmes relativement bien définis**. Toute **la dimension importante de la formulation** n'a pu être touchée étant donné l'absence de recherche dans ce domaine particulier. Il est facile de supposer qu'à ce niveau une **présence** du contexte amène des **manières non standards** ou non scolaires de définir les problèmes.

Il reste donc à incorporer dans notre réflexion tout cet aspect de la dynamique de résolution de problème que Lave (1984) par exemple analyse finement dans le cas du raisonnement arithmétique contextualisé.

La question que cet exposé aborde est plutôt celle de la reformulation ou la transposition du problème dans une modalité représentationnelle conduisant plus facilement à une solution. Le raisonnement contextualisé s'appuie sur des représentations externes renvoyant directement aux représentations internes issues du contexte et caractérisant le problème abordé. Le contexte doit être distingué de ses représentations internes dont la fonction est de circonscrire les éléments pertinents aux problèmes considérés. C'est ainsi que la connaissance du contexte, la familiarité qu'on en a sont des éléments capitaux dans la sélection, la combinaison et l'articulation des représentations internes et externes retenues et dont les relations gagneraient à être mieux étudiées. Ces représentations du raisonnement contextualisé permettent de mieux mettre en relief les relations essentielles ou fondamentales, servent aussi pour organiser la solution (ou encore la mise en œuvre du processus de résolution), la baliser, la diriger.

En résumé, en réalisant une certaine proximité entre la situation et sa représentation grâce à des **images mentales** différentes ou plus riches, ou encore par des **diagrammes**, des **schémas**, des **descriptions verbales** plus évocatrices, des **gestes**, des **simulations**... Le raisonnement contextualisé favorise l'articulation des variables concernées et contribue au succès du processus de résolution.

Conséquences pour l'enseignement

Comme le précise le rapport Cockcroft:

> It is important that the mathematical **foundation** which has been provided in the classroom should be such as to enable **competence** in **particular applications to develop** within a reasonably short time once the necessary employment situation is encountered.

Rappelons que cette recommandation figure dans un rapport énonçant des principes d'actions résultant d'une enquête menée auprès d'une vaste audience au Royaume Uni et devant conduire à une réforme dans l'enseignement des mathématiques. Le cadre théorique élaboré dans cette présentation ne remet pas en question la solution présentée par la commission Cockcroft, mais la situe dans un perspective renouvelée qui permet de mieux décrire la nature des problèmes observés et les caractéristiques des actions à entreprendre dans le milieu éducatif. En effet, tout l'exposé nous permet

cherche tout de donner un sens plus précis à l'expression **mathematical foundation that could be provided**. Il veut par contre parler de ce qui est désigné sous le vocable de **mathematical foundation** soit vraiment rapprochable de la pratique habituelle des enseignants de mathématiques. La question reste cependant entière de savoir comment permettre aux étudiants d'arriver assez rapidement à une **competence for dealing with particular applications**. Puisque la pratique de plusieurs utilisateurs n'est pas principalement le fruit d'une particularisation de ce qui est appris à l'école, on n'est pas beaucoup plus à même de définir ce qu'on peut entendre par cette **base** que Cockcroft recommande. L'argumentation de cet exposé nous conduit à proposer que les programmes et les méthodes d'enseignement facilitent l'introduction en classe des processus de pensée sans séparer le raisonnement contextualisé.

Il faut donc que l'enseignement se renouvelle de manière à retenir l'utilisation de situations permettant la solution en classe de problèmes signifiants. En d'autres mots, il faut **introduire le contexte** en classe de mathématique. L'objectif général de l'enseignement des mathématiques jusqu'au niveau secondaire 3 ou 4 en tout cas consisterait à familiariser les élèves avec un grand nombre de contextes généraux et englobants. Les quelques exemples connus dont USMES (1973) font aussi Lemon 1975) nous permettent même de fixer des balises à cette entreprise. En fait, cette familiarisation du contexte et de sa mathématique sous-jacente devrait se faire d'une manière lente et progressive. Comme nous l'ont montré les exemples, il ne sert à rien de se presser vers les outils puissants (tel les équations dans le cas des circuits) car on ne fait que court-circuiter la familiarisation nécessaire avec les relations connectant contexte et mathématique. En d'autres mots, la familiarité avec le contexte exige une implication soutenue et constante fondée sur un processus de modélisation simple. L'objectif n'est plus de formuler un principe général (consignable dans une représentation puissante telle l'équation) mais plutôt d'explorer en profondeur et dans plusieurs directions des relations fondamentales à l'aide de représentations différentes mais efficaces.

La nature des habiletés à développer et l'introduction de contextes en classe amènent directement à la nécessité de retenir une forme d'enseignement axée sur l'intégration des disciplines scientifiques (sciences physiques comme sciences de la nature) réalisée par le biais d'une approche par résolution de problèmes concrets. Il faut que les étudiants soient confrontés à des situations qui les captivent, qui les interpellent. Bien entendu, un élargissement des programmes doit être envisagé.

Les conditions de réalisation de ces objectifs sont plus faciles au niveau primaire qu'au niveau secondaire où existe un partage disciplinaire des responsabilités. Donner

une plus grande importance au contexte signifie donc pour l'enseignant de mathématiques l'introduction de situations pertinentes dans ses cours mais aussi l'enseignant de sciences doit repenser l'utilisation des mathématiques dans ses cours. Il devrait pouvoir s'affranchir davantage des méthodes mathématiques traditionnelles.

Evidemment, il faut concevoir les leçons d'une manière différente. Elles ne sauraient être finement programmées. Puisque les contextes entraînent l'examen de questions ouvertes, les démarches suivies par les élèves ne peuvent être que sommairement balisées. Les enseignants ont donc besoin d'un support non négligeable pour assumer avec aisance ce rôle renouvelé. Les manuels scolaires sont à revoir totalement. En considérant la signification des concepts comme devant être construite sur une base individuelle mais de manière à les rendre socialement efficace, c'est toute la gestion de la classe qui s'en trouve transformée. Il faut donc pouvoir ajouter au cours magistral traditionnel, tout l'arsenal de méthodes alternatives: travail par équipes, simulation sur ordinateur, sorties... Chaque groupe devrait ainsi pouvoir disposer d'un laboratoire leur permettant de construire, de mesurer, d'estimer, de prédire en relation avec les contextes divers qui sont retenus.

Voilà un plan étourdissant mais qui ne saura être réalisé sans que les moyens d'évaluation soient révisés en profondeur. Il faut en effet se méfier en éducation des projets dont les produits ne sont pas facilement et directement évaluables. En fait l'école est dans la grande partie de ses activités contrôlée par ses examens, tests, épreuves de toutes sortes qui viennent déterminer son organisation: Si le raisonnement contextualisé qui n'est qu'une forme particulière de résolution de problèmes doit s'établir comme un objectif à atteindre, il faudra que les moyens d'évaluer se mettent sont créés simultanément à la pédagogie qui en assurera son développement.

D'autres essais de théorisation

Beaucoup de questions portant sur les programmes, les méthodes d'enseignement principalement dans les pays en voie de développement ont entraîné dans les années 1980 des réflexions et des études sur, d'une part, la mathématique, son enseignement, son apprentissage et, d'autre part les facteurs sociaux tels la langue, les coutumes... Ainsi a-t-on vu apparaître le mot ethnomathématique pour désigner dans les congrès de didactique le «lieu de rencontre» de ces interrogations. Le congrès de l'ICME tenu à Budapest en 1988 a même mis à son programme un atelier dont est issu un volume illustrant la variété des questions débattues et surtout la diversité des approches retenues. Bishop (1988) fait une bonne synthèse des réflexions à ce jour. Voir Kenel (1989)! A l'exception des travaux de Carraher, Schliemann et quelques autres déjà traités

précédemment: les considérations exposées sont principalement d'ordre social, philosophique, linguistique... plutôt que cognitiviste.

Pour fournir un aperçu des grandes catégories présidant à cette analyse, nous avons retenu un article récent de Brown, Collins and Duguid (1989) intitulé: Situated cognition and the Culture of Learning. On constate dans le titre que ces chercheurs centrent leur réflexion autour de la notion de «situated cognition» et de «situated learning», que l'on peut grosso modo rapprocher de la notion de raisonnement contextualisé présenté dans ce texte. La notion de «situated knowledge» est intimement rattachée à la notion d'**activités authentiques** qui sont le propre des praticiens. Cette authenticité est définie au niveau des échanges entre individus et suppose un **consensus** principalement déterminé par les acteurs principaux. On constate que les aspects cognitifs ne sont considérés de manière à incorporer le rôle des représentations dans l'apprentissage. Un concept central est cependant celui de **représentations indexicales**. Le vocable **index** est utilisé dans ce sens que certaines désignations **montrent** implicitement dans certaines directions pour «encadrer la sémantique». Cette approche principalement sociale et conduit à considérer la connaissance principalement comme une culture et l'apprentissage comme à un processus «**enculturation**» (nous conservons le mot anglais):

L'analyse du présent exposé fait beaucoup pour clarifier les questions qu'une analyse de caractère social laisse en plan. C'est ainsi par exemple que nous avons formulé des lignes d'actions précises tout à fait *conforme avec l'objectif* pédagogique général de ces auteurs: *frame a convincing account of the relationship between explicit knowledge and implicit understanding*.

Le raisonnement contextualisé que nous avons introduit dans cet exposé correspond à une approche plus cognitive au connaissance du praticien et débouche naturellement sur le rôle des représentations dans les processus de pensée. Il est donc en quelque sorte complémentaire car il a pour effet de tendre à expliquer le comment de la compréhension implicite de «groupes culturels» par une analyse fine des représentations utilisées.

Les positions de cet exposé et celles de Brown, Collins and Duguid (1989) également constructivistes sont à rapprocher de celle de Moscovici qui a étudié la connaissance scientifique en ce qu'elle est à la source de représentations sociales caractérisant la connaissance «populaire» scientifique. La notion de vulgarisation du savoir scientifique s'y trouve finement étudiée comme une forme de transposition du savoir savant pour et par des non-initiés intéressés. Cependant, le praticien se

distingue par le fait qu'il est dans une situation régulière de résolution de problèmes et de vérification empirique de son savoir. Le non-initié est plutôt à la merci d'une spéculation peu compromettante et peu déterminante. Sa connaissance en tant qu'ensemble de modèles explicatifs est plus instable et moins active. Les catégories interprétatives de Moscovici visent plutôt l'étude d'un phénomène autre que nous prenons quand même la peine de souligner.

Les considérations de nature principalement sociale rendent évidemment l'analyse de la contextualisation des savoirs et de ses conséquences pour l'enseignement très complexe. En plus de ces contextes à introduire en classe, doit-on provoquer l'apparition de «communauté de savoir» pour chaque centre d'intérêt, quelle doit être la portée de ce regroupement social. Même si l'opérationalisation de ces réflexions reste à formuler, il nous apparaît important de retenir qu'une dimension importante du raisonnement contextualisé est le fait qu'il ne soit pas seulement individuel. En effet, même s'il se développe chez le praticien en situation de résolution de problème il conviendrait d'examiner comment son élaboration dépend également de la communauté d'échanges à laquelle il appartient.

Conclusion

Que devient l'enseignement des mathématiques dans cette perspective? J'estime que les réflexions de cet exposé nous suggèrent de faire en sorte que la mathématique comme une science enseignée à l'école n'apparaisse contextualisée que tardivement à l'intérieur de nos programmes. Le contexte utilisé pour développer cette science mathématique ou encore son objet d'étude seront précisément cette mathématique contextualisée ou ces raisonnements contextualisés que nous avons tenté de décrire dans notre exposé et que plusieurs, dont de Lange (1987) qui a été attardé aux "realistic mathematics", hésite à qualifier de mathématique.

Ainsi, les mathématiques utilisées par les utilisateurs décrits dans l'exposé pourraient peut-être être désignées par le vocable de pré-mathématiques contextuelles si nous voulons éviter les foudres des puristes qui ne voient pas ici à juste titre) de mathématiques sans un certain niveau d'abstraction.

Bibliographie

Bishop, A.J. (1991): *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education* (Mathematics Education Library). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Brown, J.C., Collins, A. & Duguid, P. (1989): Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researcher, 18*(1).

Carraher, D.W., Carraher, T.N., & Schliemann, A.D. (1986): Having a Feel for Calculations. In: *Mathematics for All. Science and Technology Education. Document Series No. 20*, edited by Peter Damerow, Mervyn E. Dunkley, Bernwards F. Nebres, and Bevan Werry. Paris: Unesco.

Carraher, T.N., Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (1985): Mathematics in the Streets and in Schools. *British Journal of Developmental Psychology, 3*: 21-29.

Cockcroft, W.H. (1982): *Mathematics Counts*. Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools. London: Her Majesty's Stationery Office.

D'Ambrosio, U. (1986): What can we Expect From Ethnomathematics? In: C. Keitel (Ed.): *Science and Technology Education: Mathematics Education and Society*, (pp. 102-103). Paris: UNESCO.

De Lange, J. Verhage, H.B. (1987): Math A and its achievement testing. Proceedings of P.M.E.-XI Conference. (Eds.) Bergeron, J.C., Herscovics, N. & Kieran, C. Montreal, 1987.

Freudenthal, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Co.

Lave, J., Murtaugh, M. & de la Rocha, O. (1984): The Dialectic of Arithmetic in Grocery Shopping. In: B. Rogoff and J. Lave (Eds.): *Everyday Cognition: Its Development in Social Context* (pp. 67-94). Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Letton, E. et al. (1985): Real problem solving in USMES. Interdisciplinary education and much more. *School Science and Mathematics*, Jan.: 53-64.

Meadows, D.H., Meadows, D.L., Randers, J. & Behrens III, W.W. (1972): *The Limits to Growth*. London: Earth Island.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989): *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: The Council.

National Research Council. (1989): *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Vergnaud, G. (1983): Multiplicative Structures. In R. Lesh and M. Landau (Eds.): *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-74). New York: Academic Press.

(1973): The U.S.M.E.S. Guide. Education Development Center. Newton, Mass.

Bon de commande

no 50 Contextualisation et représentation en mathématiques ..... x 2.50$ .....

Ajoutez 20% pour les frais d'envoi, d'emballage et de manutention .....

Total .....

Veuillez retourner votre commande dûment remplie à

Guylaine St-Pierre
CIRADE, X-7115
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. A
Montréal (Québec) Canada H3C 3P8
pour informations: (514) 987-6186

Les commandes doivent être accompagnées du paiement par chèque, fait à l'ordre du CIRADE.

Des exemplaires du présent document sont en vente à l'adresse suivante:

Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage
et le développement en éducation
Université du Québec à Montréal
Pavillon Sainte-Catherine Ouest
315, rue Sainte-Catherine Ouest
Local X-7115

Case postale 8888, succursale A
Montréal (Québec)
H3C 3P8

Tél.: (514) 282-6155

Pour commander, remplir le formulaire de réquisition
apparaissant à la dernière page du document.

Publié par le Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage
et le développement en éducation

Conception graphique: Pierrette Bissonnette